

# Das induktive, parasitäre Streufeld des Verteilungs- und Hochspannungstransformators im räumlichen Fernbereich

Reinhard Kegel

## 1. Einleitung

Seit Inkrafttreten der NIS-Verordnung (SR 814.710) stehen im Vordergrund die physikalisch korrekten digitalen Nachbildungen der Betriebsmittel wie z.B. der Verteil- oder Hochspannungstransformator und hier insbesondere die parasitären Transformatorstreufelder. Dieser Aufsatz geht der Frage nach, welche Isolinienform Transformatoren aufweisen und lehnt sich an die Publikation [3] und [4].

Für eine beliebige Stromverteilung, die sich auf ein endliches Volumen  $V$  beschränkt, verschwindet der Einfluss der inneren Struktur auf das äußere Feld für große Entfernungen. Je kleiner der Abstand  $r < R$  zu der Stromverteilung ist, desto größer ist der Einfluss der inneren Struktur. Diese Tatsache macht man sich bei der Multipolentwicklung zunutze. Das Feld wird im Außenraum für  $r > R$  in eine Reihe zerlegt. Die Komplexität Reihenelemente nimmt zu, während ihr Einfluss in großen Abständen abnimmt, so dass oft nur die ersten Elemente zu berücksichtigen sind. Die Multipol-Reihe konvergiert im Außenraum der Stromverteilung gegen die exakte Lösung des Potentials [1,4].

## 2. Die Multipolentwicklung einer Stromverteilung

Die Multipolentwicklung kann in beliebigen Koordinatensystemen durchgeführt werden; am häufigsten sind dabei kartesische und Kugelkoordinaten. Der Vorteil der kartesischen Entwicklung ist dabei die Beschränkung auf reelle Zahlen. Der Entwicklungsterm  $l$ -ter Ordnung ist ein Tensor  $l$ -ter Stufe. Die Anzahl unabhängiger Einträge in einem dreidimensionalen Tensor  $l$ -ter Stufe ist proportional  $l^2$ . Berechnungen mit einer Ordnung mit  $n > 2$  sind daher extrem aufwendig und unübersichtlich. In Kugelkoordinaten wird nach Kugelflächenfunktionen entwickelt. Man nutzt dabei die Tatsache, dass sich die Greenfunktion nach Kugelflächenfunktionen entwickeln lässt. Die Kugelflächenfunktionen selber sind komplexe Tensoren  $l$ -ter Ordnung in Kugelkoordinaten, und die Anzahl unabhängiger Einträge ist nur proportional  $l$ . Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Entwicklung in Kugelkoordinaten verwandt.

Die Reihenentwicklung des magnetischen Potentials  $U$  einer auf das Gebiet  $r < R$  beschränkten zulässigen Stromverteilung mit

$$\sum_{\zeta=1}^n \underline{I}_{\zeta} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \underline{\vec{S}} = 0 \quad (1)$$

liefert für  $r > R$  das komplexe, magnetische Potential:

$$\underline{U}(r, \vartheta, \varphi) = \left( 4 \cdot \pi \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \cdot \sum_{m=-l}^{m=l} \left( \frac{1}{2 \cdot l + 1} \cdot \frac{M_{l,m}}{r \cdot l + 1} \cdot Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \right) \right) \quad (2)$$

Beschränkt man sich auf  $r > R_0$  und berücksichtigt man ferner, dass man nach der heutigen Maxwell-Theorie magnetische Monopole bei Spulenwicklungen ausschließen kann, fallen in der Reihenentwicklung die höheren  $M_{l,m}$ -Glieder und  $M_{0,0}$  weg [4]. Die Entwicklung liefert für  $l=0, 1, 2$  den Zusammenhang

$$\underline{U}(r, \vartheta, \varphi) = 4 \cdot \pi \cdot \left( \frac{1}{r^2} \sum_{-l}^l \frac{M_{l,m}}{3} \cdot Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{r^3} \cdot \sum_{m=-2}^2 \frac{M_{2,m}}{5} \cdot Y_{2,m}(\vartheta, \varphi) + \dots \right). \quad (3)$$

Die Aufgabe besteht nun in der Bestimmung  $M_{l,m}$  – Glieder. Die Kugelflächenfunktionen sind bekannt und tabelliert (siehe Anhang). Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht in einfachen Bestimmung der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  durch Gradientenbildung:

$$\vec{B}(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \nabla \underline{U}(r, \vartheta, \varphi) \quad \text{für } r > R_0 \quad (4)$$

Ausführlich geschrieben und die Gradientenbildung ausgeführt:

$$\vec{B}(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{U}}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \quad \text{für } r > R_0 \quad (5)$$

Die oben erwähnte Stromdichteverteilung für  $r < R$  erzeugt durch Überlagerung aller Dipolmomente in den drei Transformatorschenkel ein Dipolmoment der Größe

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} \underline{m}_x \\ \underline{m}_y \\ \underline{m}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\mu=1}^3 \underline{m}_x^\mu \\ \sum_{\mu=1}^3 \underline{m}_y^\mu \\ \sum_{\mu=1}^3 \underline{m}_z^\mu \end{pmatrix} = (R^2 \cdot \pi) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{\mu=1}^3 \underline{I}_x^\mu \\ \sum_{\mu=1}^3 \underline{I}_y^\mu \\ \sum_{\mu=1}^3 \underline{I}_z^\mu \end{pmatrix} \quad (6)$$

und den drei komplexen Komponenten  $\underline{m}_x$ ,  $\underline{m}_y$ ,  $\underline{m}_z$ . Dabei kann gezeigt werden, dass für das erste Glied der Reihenentwicklung sich in  $M_{l,m}$  Linearkombinationen der Multipolmomente in kartesischen Koordinaten darstellen lassen:

$$\underline{M}_{l,-1} = \sqrt{\frac{3}{8 \cdot \pi}} \cdot (\underline{m}_x + j \cdot \underline{m}_y)$$

$$\underline{M}_{l,0} = \sqrt{\frac{3}{8 \cdot \pi}} \cdot \underline{m}_z \quad (7)$$

$$\underline{M}_{l,+1} = \sqrt{\frac{3}{8 \cdot \pi}} \cdot (-\underline{m}_x + j \cdot \underline{m}_y)$$

$$\underline{U}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \cdot \underline{m}_x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + \frac{1}{r^2} \cdot \underline{m}_y \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \frac{1}{r^2} \cdot \underline{m}_z \cdot \cos \vartheta \quad (8)$$

Dieser Ausdruck lässt sich wesentlich einfacher als skalares Produkt beschreiben:

$$\underline{U}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} \underline{m}_x \\ \underline{m}_y \\ \underline{m}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (9)$$

oder

$$\underline{U}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \cdot \underline{\vec{m}} \cdot \underline{\vec{r}}_0. \quad (10)$$

Wird nun ein Dipol angenommen, deren Momentenvektor in Richtung der z-Achse verläuft, so erhält man:

$$\underline{\vec{B}} = \begin{pmatrix} \underline{B}_r \\ \underline{B}_\vartheta \\ \underline{B}_\varphi \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 \cdot \underline{m}_z}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Dabei stellt  $\underline{\vec{m}}_z$  der resultierende, komplexe Momentenvektor des Dipolmomentes dar, wobei der Betrag definiert ist durch eine Leiterschleife mit dem komplexen Strom  $\underline{I}$  und dem Radius  $R$  sowie der Fläche  $R^2 \cdot \pi$ . Da der Ansatz muss verallgemeinert über insgesamt drei Dipolmomente erfolgen, die wiederum durch die drei Komponentenströme mit unterschiedlichen Phasenlagen induziert werden:

$$\underline{\vec{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{m}_z \end{pmatrix} = R^2 \cdot \pi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\mu=1}^3 \underline{I}_\mu \end{pmatrix} = A \cdot \underline{\vec{e}}_z \cdot \underline{I}_s \quad (12)$$

Bild 1. Radienverhältniss bei konstanten B

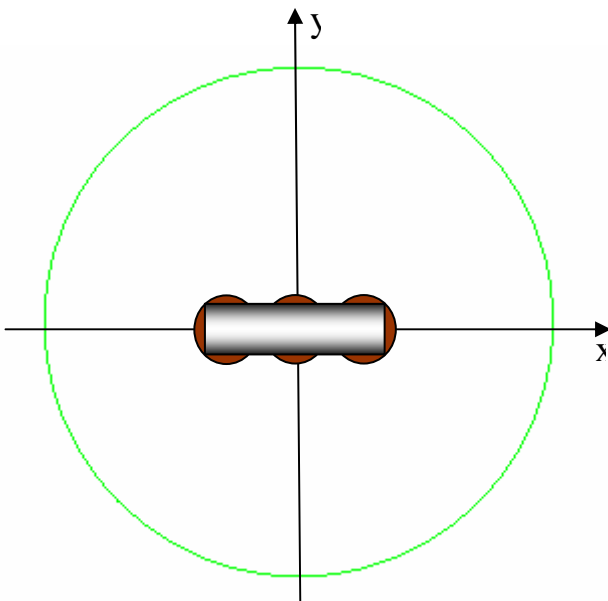
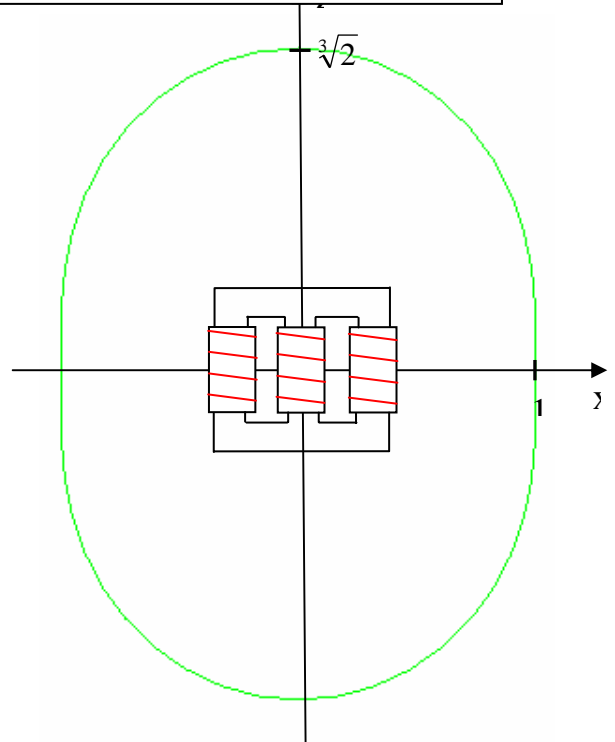


Bild 2. Radienverhältniss bei konstanten B



Die gleichen Isolinienbilder (Bild 1 und Bild 2) sind messtechnisch in einer Vielzahl von Veröffentlichungen bestätigt worden [2], [3], [4]. Sie lassen sich im Wesentlichen nach Gl. 11 und 12 bestimmen.

### 3. Zusatzfelder durch die ober- und unterspannungsseitigen Anschlüsse

Durch die ober- und unterspannungsseitigen Anschlüsse werden Zusatzfelder erzeugt, die sich dem in Abschnitt 2 dargestellten Dipolfeld überlagern. Diese Zusatzfelder sind stark von der Last, der Bauart und vom Übersetzungsverhältnis abhängig.

Reine Verteiltransformatoren bis 1,8 MVA werden nach den gleichen Bau-Schemata hergestellt, wie Leistungstransformatoren. Kleinere Variationen - wie z.B. die Dicke der Deckenplatte oder Abmessungen des Wellenöl-Kessels beeinflussen das magnetische Streufeld im Aussenraum nur gering [2]. Die Grössenordnung liegt bei ca. 5 ... 10 %. So weisen beispielsweise die Streufelder von Schweizer Transformatorenherstellern etwas kleinere Streufelder als deutsche SGB-Transformatoren auf. Aus diesem Grunde lassen sich die Streufelder von Verteiltransformatoren relativ gut als komplexe Dipolfelder mit der Formel:

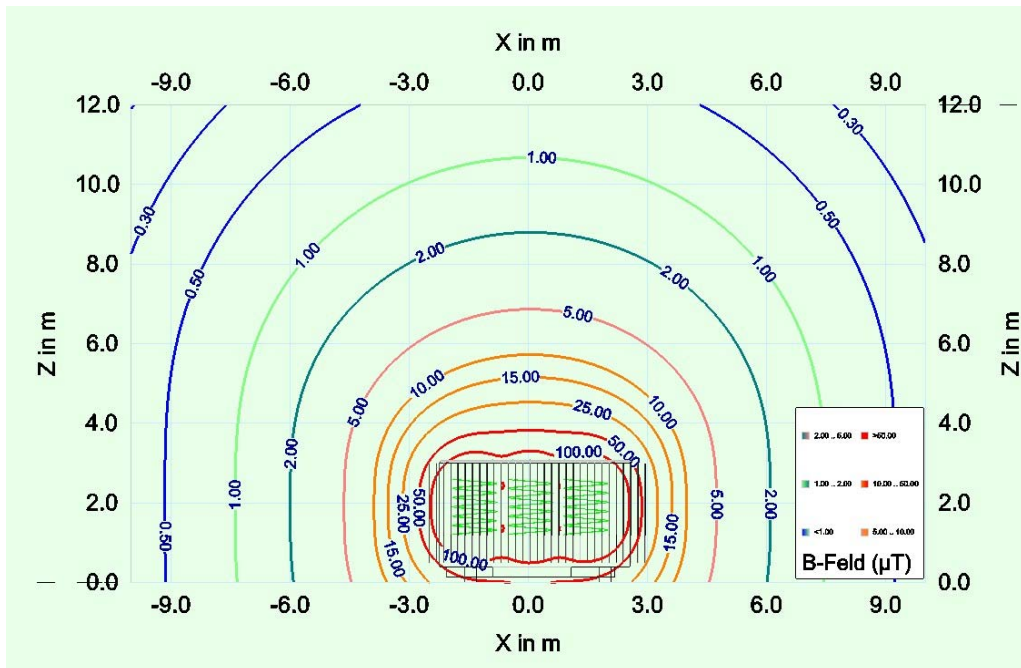
$$B = B_0 \cdot \frac{u_k}{u_{k0}} \cdot \sqrt{\frac{S_n}{S_{n0}}} \cdot \left(\frac{a_0}{a}\right)^x \cdot k_T \quad (13)$$

Es bedeutet  $B_0$  die Flussdichte im Abstand  $a_0$  und  $B$  die Flussdichte im Abstand  $a$ . Der Last- bzw. Korrekturfaktor ist bei Nennlast und bei Transformator-Typen gleicher Bauart  $k_T = 1$ . Der Exponent beträgt  $2 < x < 3$  und für den Bereich  $a = 1\text{m}$  bis ca.  $10\text{m}$   $x = 2,8$ . Für typische Giessharz -Verteil-Transformatoren lassen sich die Grössen wie folgt bestimmen: in 3 Meter Abstand wurde  $5 \mu\text{T}$  gemessen (der Nullpunkt ist der räumliche Mittelpunkt des Transformators) Für diesen Fall gilt dann:

$$B = 5\mu\text{T} \cdot \frac{u_k}{6\%} \cdot \sqrt{\frac{S_n}{630\text{kVA}}} \cdot \left(\frac{3\text{m}}{a}\right)^{2,8} \cdot k_T \quad (14)$$

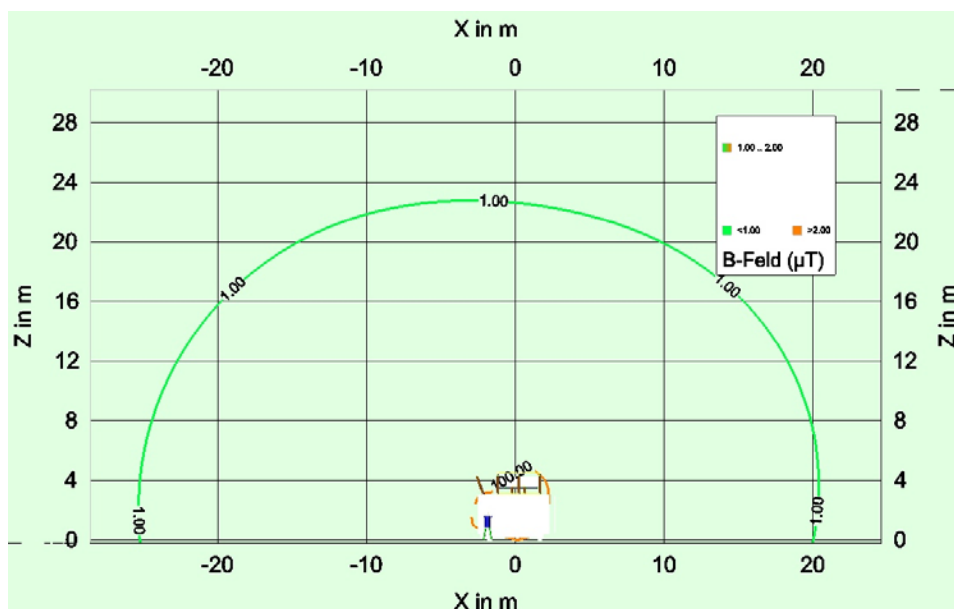
Für Grosstransformatoren ist die Bestimmung des magnetischen Streufeldes wesentlich schwieriger, weil einerseits die magnetische Streuung (Streukanal!) von der Stellung des Stufenstellers und andererseits von der häufig wechselnden Bauart abhängt. So werden seit 1980 zwischen Wicklung und Ölkessel in zunehmenden Masse sogenannte Bypass-Bleche eingelegt [5], die den Streufluss gar nicht erst in den Kessel, sondern bereits davor zum schliessen bringen sollen. Diese Massnahme dient in erster Linie zur Verringerung der Kesselverluste, die bei Transformatoren ab 20 MVA erheblich sein können. Die Kesseldicke nimmt im Bereich mit 3 bis 5 mm zu und die Deckenplatte weist gegenüber den Verteiltransformatoren zum Teil eine wesentliche höhere Dicke im cm-Bereich auf. Aus diesem Grunde ist eine formelmässige Bestimmung des Streuverhaltens von Umspannern hier analytisch nicht mehr möglich und muss durch aktuelle Messungen ergänzt bzw. bestimmt werden.

Andererseits konnte nachgewiesen werden, dass in einiger Entfernung vom Transformator sich grundsätzlich ein sogenanntes Dipolfeld ergibt, welches mit etwa der dritten Potenz abnimmt. Der Nachweis wurde in [2], [3] und theoretisch mit Gleichung (11) erbracht.



**Bild 3.** Als Näherung eingestelltes magn. Streufeld des 40 MVA –Transformator in der X0Z-Darstellung. Dieser Isolinien-Kurvenverlauf muss stets durch eine messtechnischen Nachkontrolle geprüft werden. Der Isolinienverlauf entspricht dem Bild 2, also einem Dipolfeld nach Gleichung (11)

Da auch das Zusatzfeld wesentlich von Polmittenabständen der Rohrsammelschienen bzw. der Kabeltrasse abhängig ist, variiert das Zusatzfeld sehr stark. Im Vorliegenden Fall wird das Gesamtfeld mit einem Radius von etwa 7,5 Meter (siehe Bild 3) auf etwa 24 Meter vergrößert (siehe Bild 4).



**Bild 4.** Darstellung der magnetischen Gesamtflussdichte  $B$  eines 40-MVA-Hochspannungs-transformator mit dem Übersetzungsverhältnis 120,8- kV zu 18-kV bei Vollast. Durch das Zusatzfeld wurde das räumliche Gesamtfeld nahezu verdreifacht.

Weist die Schaltgruppe des Verteil- bzw. Hochspannungstransformators die Kennziffer z.B. 5 auf, so muss diese Phasenverschiebung mit 150 Grad zwischen Ober- und Unterspannung im Rahmen der digitalen Nachbildung phasengerecht nachgebildet werden, da sonst das Gesamtfeld nicht korrekt nachgebildet wird.

#### 4. Zusammenfassung

Das magnetische Streufeld von Verteilungs- und Hochspannungstransformatoren weisen in der Draufsicht kreisförmige und im Querschnitt elliptisch geformte Isolinien auf (siehe Bilder 1 und 2). Der Betrag der magnetischen Ersatzflussdichte lässt sich näherungsweise für Verteilungstransformatoren bis 1,8 MVA formelmässig angeben. Für grössere Tranformatoren ist die Bestimmung der magnetischen Ersatzflussdichte nur noch messtechnisch möglich.

#### 5. Literaturverzeichnis:

[1]	Kegel, R.	Numerische Berechnung und Kompensation von Eigenschwingungen in Spannungswandlern. – Der Messwandler als EMV-Breitband-Meßsystem – 8. Symposium Maritime Elektronik, Universität Rostock, 1995
[2]	Alber, Friedrich	Verteilungstransformatoren und EMV Etz Bd 115 (1994) Heft 20
[3]	Hadrian, W.	Leitungen, Transformatoren und Schaltanlagen als Störquellen Elektrotechnik und Maschinenbau 101 (1983) H.1, S.21-28
[4]	Hadrian, W.	Der Transformator als Feldquelle – Theoretische Grundlagen und messtechnischer Befund Elektrie, Berlin 45 (1991) Heft 6, Seite 235 – 237
[5]	Kubusch, M.	Berechnung der Verluste ebener elektromagnetischer Abschirmungen und abgeschirmter Eisenteile von Tranformatoren Elektrie 39 (1985), H. 8 Seite 300 - 303

## Anhang

### Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplace-Operators.

Bekanntlich ist der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten angewendet auf eine Funktion wie folgt definiert:

$$\Delta f(r, \vartheta, \varphi) = \left( \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) \right).$$

Im Folgenden wird die Funktion  $f$  trennbar nach zwei Funktionen, in  $g(r)$  und nach den Winkeln  $f(r, \vartheta, \varphi)$  aufgefasst, so dass gilt:

$$\Delta f(r, \vartheta, \varphi) = g(r) \cdot f(r, \vartheta, \varphi).$$

Gesucht sind nun die Eigenfunktionen des winkelabhängigen Teiles, die die obige Gleichung erfüllt. Für die Funktion  $f$  wird dafür üblicherweise ein Separationsansatz mit

$$f(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi) \text{ gewählt.}$$

Wird dieser Ansatz in die Partielle Differenzialgleichung eingesetzt, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$-\frac{1}{Y} \left( + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{1}{R(r)} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - r^2 g(r)$$

Beide Seiten der Gleichung müssen konstant sein. Die Kugelflächenfunktionen  $Y$  erfüllen die winkelabhängige Gleichung und es gilt der folgende Zusammenhang:

$$\Delta f(r, \vartheta, \varphi) = - \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Bei näherer Betrachtung stellt man fest, dass der Eigenraum zum Eigenwert  $l(l+1)$  genau  $2l+1$  dimensional ist. Die Entartung wird über den Index  $m$  gekennzeichnet.

